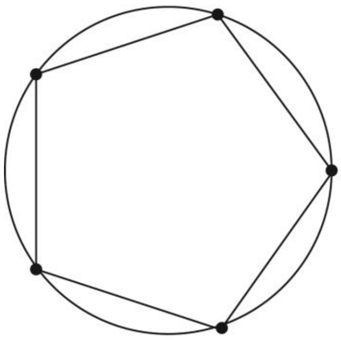
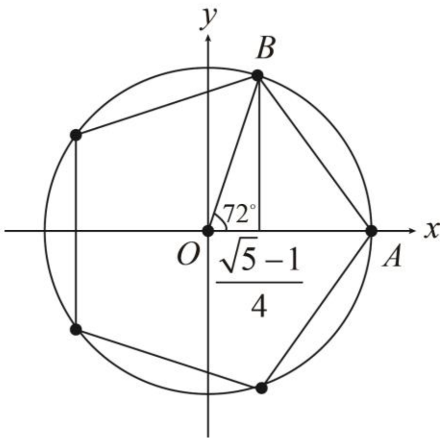
49 既漂亮又簡潔的芮奇蒙正五邊形作圖法…精準的數學工藝

自歐幾里得在《幾何原本》第四卷命題十一提出如何尺規作圖正五邊形以來，正五邊形的各種不同作圖方法不斷被提出。但是，簡潔、有力又漂亮的方法是芮奇蒙（H. W. Richmond）在 1893 年所想到的一種方法。讓我們來欣賞芮奇蒙關於圓內接正五邊形的尺規作圖。

如果將左圖中的圓內接正五邊形，於圓心畫上兩條坐標軸，並讓 x 軸正向通過正五邊形的一個頂點，如右圖所示，那麼位於第一象限的正五邊形頂點 B 之坐標為何呢？





因為是正五邊形，所以 $\angle AOB = 72^\circ$，即 B 的坐標為 $(\cos 72^\circ, \sin 72^\circ)$。又因為

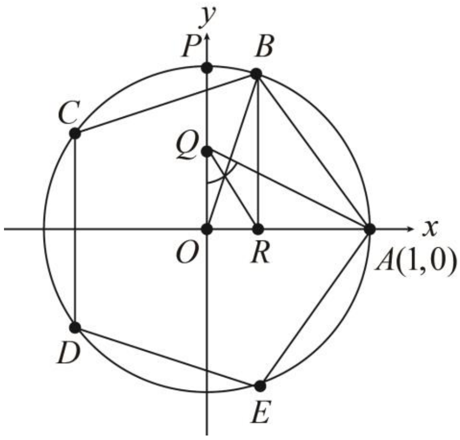
$\cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$，所以 B 的坐標為

$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)$。這 B 點坐標，特別是 y 坐標，看起來很嚇人，但是對作圖來講，

只要在 x 軸作出點 $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, 0\right)$，再作過此點的鉛直線，則鉛直線與圓的交點就是 B 點。

事實上，我們可以在旁邊作出長度 $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 的線段，再把此線段放在 x 軸。這樣雖然可行，但不夠簡潔與漂亮。讓我們來看看芮奇蒙如何一氣呵成將這些步驟整合在一起：

在下圖的單位圓中，Q 是半徑 $\overline{OP}$ 的中點，$\angle AQO$ 的分角線與 x 軸相交於 R 點，過 R 點的鉛直線與單位圓相交於 B 點。連接線段 $\overline{AB}$，以 B 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫圓，交單位圓於另一點 C，再以 C 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫圓，交單位圓於另一點 D，再以 D 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫圓，交單位圓於另一點 E。圓內接五邊形 $ABCDE$ 就是正五邊形：



證明：芮奇蒙的作法可以得到正確無誤的正五邊形。

我們唯一要驗證的是 $\overline{OR}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$：

令 $\overline{OR}=x, \overline{RA}=1-x$。由直角三角形知

$$\overline{QA}=\sqrt{\overline{QO}^2+\overline{OA}^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

因為 $\overline{QR}$ 是分角線，所以

$$\frac{\overline{QO}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{OR}}{\overline{RA}}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{x}{1-x}.$$

解得

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

即線段$\overline{OR}$的長度為$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$。故芮奇蒙作出的圓內接五邊形為正五邊形。